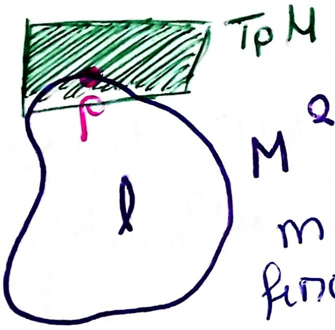
§ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ

ΕΡΩΤΗΜΑ Ας υποθέσουμε ότι $M^m \subseteq \mathbb{R}^k$ είναι πολύπτυγμα του $\mathbb{R}^k$. Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε μια επιφάνεια $M^2 \subseteq \mathbb{R}^3$.



Σε κάθε σημείο $p \in M^2$, ορίζεται ο εφαπτόμενος χώρος T_pM. Το ερώτημα είναι αν δίνονται m-διάστατοι υπόχωροι του $\mathbb{R}^k$, πότε μπορούμε να βρούμε πολύπτυγμα M^m που να έχει τους χώρους αυτούς ως εφαπτόμενους.

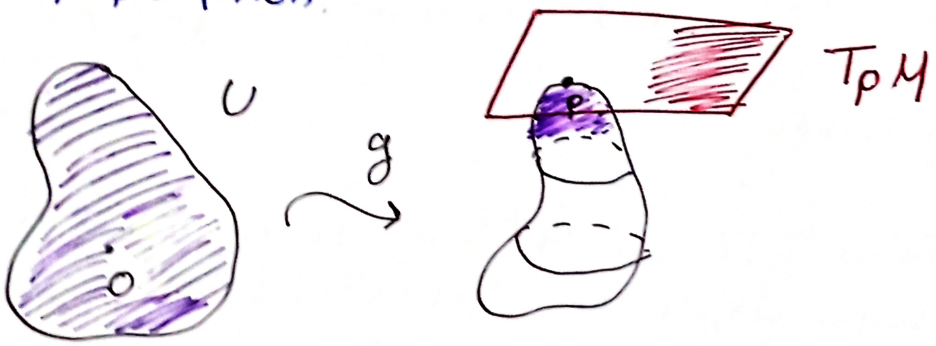
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Για να βρούμε τον εφαπτόμενο χώρο ενός προβλήματος "παραγωγίζουμε". Άρα το ερώτημα που μόλις θέσαμε αφορά πρόβλημα "ολοκλήρωσης"

2. Θα δούμε ότι το ερώτημα που μόλις θέσαμε δεν έχει πάντα καταφατική απάντηση.

ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΔΕΣΜΗ Αν M^m είναι πολύπτυγμα και $g: U \subseteq \mathbb{R}^m \to M^m \subseteq \mathbb{R}^k$ είναι μια παραμέτρηση γύρω από το σημείο p, τότε ο T_pM ορίζεται από τη σχέση $T_pM = dg_0(\mathbb{R}^m)$

Είδαμε ότι ο T_pM δεν εξαρτάται από την παραμέτρηση.



ΟΡΙΣΜΟΣ

Ως εφαπτόμενη δέσμη TM του πολυπτύγματος $M^m \subseteq \mathbb{R}^k$ ορίζουμε το υποσύνολο του $M^m \times \mathbb{R}^k$ που περιγράφεται από τη σχέση
$TM = \{(p, v) \in M^m \times \mathbb{R}^k : v \in T_pM\}$

Η εφαπτόμενη δέσμη είναι η αλλαγή όλων των εφαπτόμενων χώρων. Μπορούμε να γράψουμε
$TM = \bigcup_{p \in M^m} T_pM$

Ορισμός

Η απεικόνιση $\pi: TM \to M$ με τύπο $\Pi(p,v)=p$ ονομάζεται κανονική προβολή.

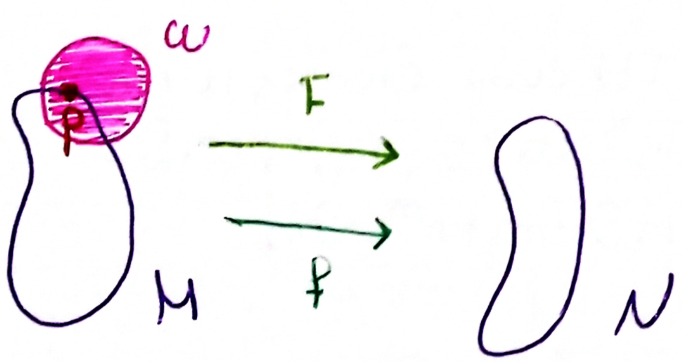
Θ.δ.ο. η εφαπτόμενη δέσμη ενός πολυπτώγματος είναι επίσης πολύπτωγμα

Λήμμα

Έστω $f: M^m \subseteq \mathbb{R}^k \to N^n \subseteq \mathbb{R}^l$ διαφορίσιμη απεικόνιση. Τότε το ολικό διαφορικό $Df: TM^m \to TN$ με τύπο $Df(p,v) = (f(p), df_p(v))$ είναι διαφορίσιμη απεικόνιση.

Απόδειξη

Από την υπόθεση, η f είναι διαφορίσιμη. Άρα γύρω από κάθε σημείο $p \in M^m$, υπάρχει περιοχή $\omega \subseteq \mathbb{R}^k$ γύρω από το p και επέκταση $F: \omega \to \mathbb{R}^l$ διαφορίσιμη της f.



Τότε η απεικόνιση $DF: T\omega = \omega \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ με τύπο $DF(x,u) = (F(x), \partial F_x(u))$ είναι διαφορίσιμη και αποτελεί επέκταση της Df. Άρα, η Df είναι διαφορίσιμη.

ΛΗΜΜΑ

Έστω ότι $f: M_1 \to M_2$ και $g: M_2 \to M_3$ διαφορίσιμες απεικονίσεις. Τότε $D(g \circ f) = Dg \circ Df$ (κανόνας αλυσίδας).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έχουμε $D(g \circ f)(p,v) = (g \circ f(p), d(g \circ f)_p(v)) =$

$(g(f(p)), dg_{f(p)} \circ df_p(v)) =$

$(Dg \circ Df)(p,v), \ \forall (p,v) \in TM_1$

Ως άμεση συνέπεια του παραπάνω λήμματος έχουμε το εξής συμπέρασμα.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $f: M \to N$ διαφορομορφισμός. Τότε το ολικό διαφορικό $Df: TM \to TN$ είναι επίσης διαφορομορφισμός, οπότε $M \simeq N \Rightarrow TM \simeq TN$.

Είμαστε σε θέση τώρα να αποδείξουμε ότι η TM είναι πολλαπλότητα.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Η εφαπτόμενη δέσμη TM ενός διαφορίσιμου πολυπτύγματος $M^m \subseteq \mathbb{R}^k$ είναι διαφορίσιμο πολύπτυγμα και $\dim TM = 2\dim M^m = 2m$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η ιδέα είναι να βρούμε κατάλληλες παραμετρήσεις γύρω από περιοχές της TM.

Έστω ότι ω είναι ανοικτό του M^m. Επειδή, $T_p\omega = T_pM$ για κάθε $p\in\omega$, έχουμε ότι

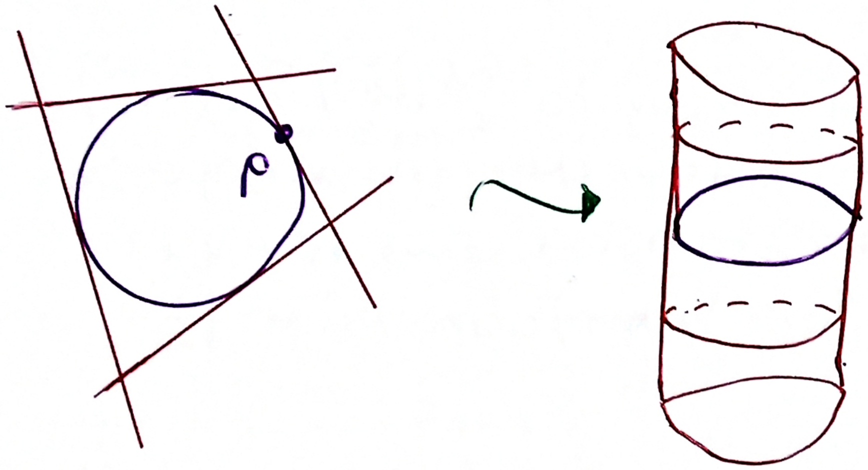
$$T\omega = \{(p,v)\in TM^m : p\in\omega\} = TM^m \cap (\omega\times\mathbb{R}^k) \subseteq TM^m$$

Έτσι, εφόσον το $\omega\times\mathbb{R}^k$ είναι ανοικτό του $M^m\times\mathbb{R}^k$ έπεται ότι το $T\omega$ είναι ανοικτό του TM. Απομένει να βρω παραμέτρηση του $T\omega$.

Εάν $g: U\subseteq\mathbb{R}^m \to \omega$ είναι παραμέτρηση, όπου U ανοικτό του $\mathbb{R}^m$, τότε το ολικό διαφορικό $Dg: TU\to T\omega$ είναι επίσης παραμέτρηση

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Ισχύει ότι $TS^1 = S^1\times\mathbb{R}$



ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω M^m ένα διαφορίσιμο πολύπτυγμα, TM^m η εφαπτόμενη δέσμη και $\pi: TM^n\to M^n$ η κανονική προβολή. Μια διαφορίσιμη απεικόνιση $X: M^m\to TM^m$ ε.ω. $\pi\circ X = Id$ ονομάζεται διανυσματικό πεδίο.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Με άλλα λόγια διανυσματικό πεδίο επί ενός πολυπτύγματος $M^m \subseteq \mathbb{R}^k$ είναι μια λεία απεικόνιση

$M^m \ni p \to (p, X_p) \in TM^m$

Σχόλιο

Για να απλοποιούμε το συμβολισμό, συχνά θα παριστάνουμε την τιμή του διανυσματικού πεδίου X στο P απλά με $X_p \in T_pM^m$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Το σύνολο όλων των διανυσματικών πεδίων του M^m το συμβολίζουμε με $\mathfrak{X}(M^m)$

ΑΣΚΗΣΗ

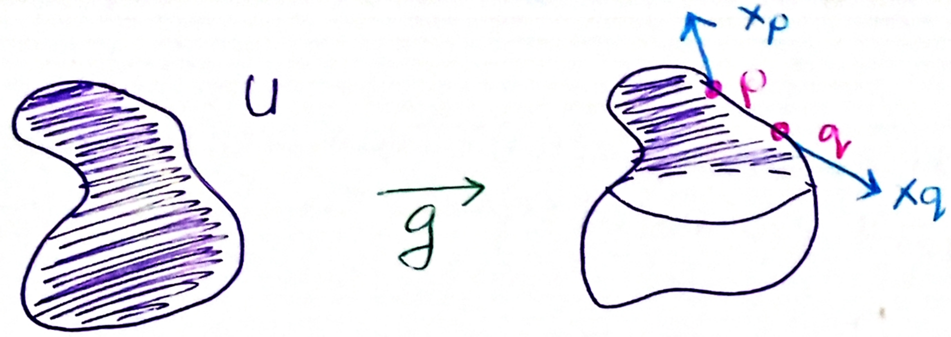
Να αποδείξετε ότι το σύνολο $\mathfrak{X}(M^m)$ δέχεται δομή διανυσματικού χώρου. (Μπορείτε να προσθέσετε διανυσματικά ~~ενα~~ πεδία, όπως και να πολλαπλασιάσετε ένα διανυσματικό πεδίο με αριθμό)

Λήμμα

Έστω X διανυσματικό πεδίο επί ενός πολυπτύγματος M^m και $g: U \to M^m$ μια παραμέτρηση.

Τότε, έχουμε $X_g(x) = (g(x), a_1(x) g_{x_1}(x) + \ldots + a_m(x) g_{x_m}(x))$

όπου $a_1, \ldots, a_m: U \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμες αναρτήσεις



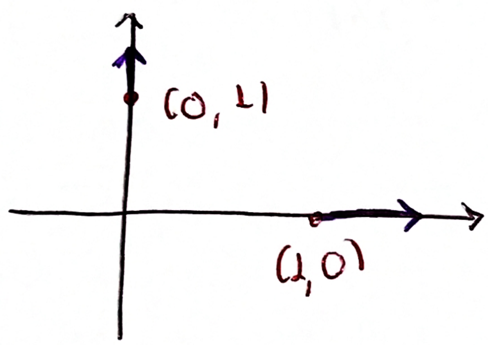
Οι συναρτήσεις $a_1, \dots, a_m$ λέγονται συνιστώσες του διανυσματικού πεδίου X ως προς την παραμέτρηση g.

Απόδειξη

Είναι τεχνική/απλή και αφήνεται ως Άσκηση

Παράδειγμα

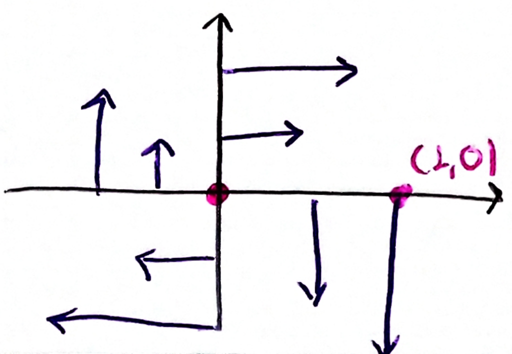
Ας θεωρήσουμε ως πολύπτυγμα του $\mathbb{R}^2$. Η παράσταση $X(x_1, x_2) = x_1 \vec{e_1} + x_2 \vec{e_2}$, όπου $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ είναι η κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$



Παράδειγμα

Στο $\mathbb{R}^2$ ας θεωρήσουμε το διανυσματικό πεδίο

$X(x_1, x_2) = x_2 \vec{e_1} - x_1 \vec{e_2}$



Ορισμος

Έστω ότι M είναι διαφορίσιμο πολύπτυγμα και $g: U \subseteq \mathbb{R}^m \to M^m$ μια παραμέτρηση. Τα διανυσματικά πεδία

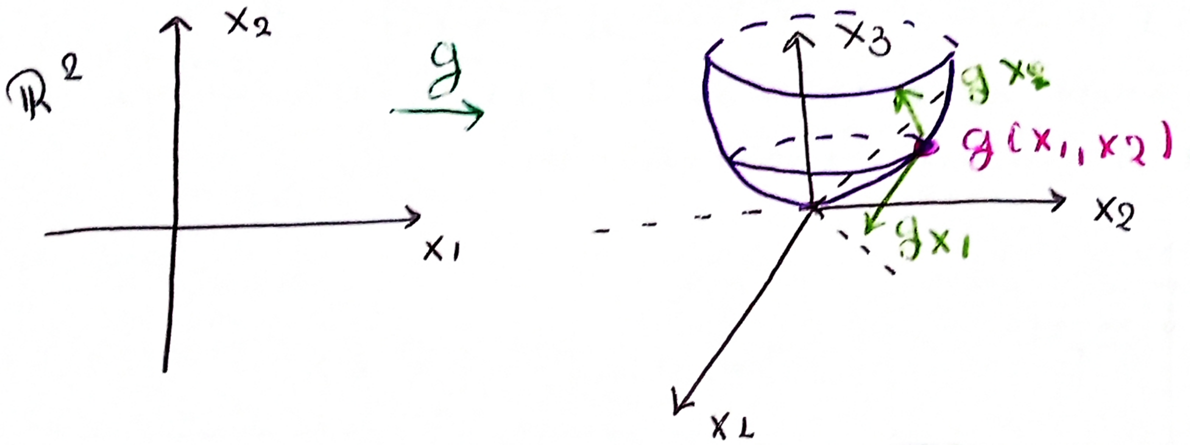
$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{g(x)} := \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = \partial x_i(x)$$

ονομάζονται βασικά διανυσματικά πεδία.

Παραδειγμα

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε το πολύπτυγμα M^2 που περιγράφεται μέσω της παραμέτρησης

$$g(x_1, x_2) = (x_1, x_2, x_1^2 + x_2^2)$$



Τα διανύσματα $\partial x_1 = (1, 0, 2x_1)$

$\partial x_2 = (0, 1, 2x_2)$

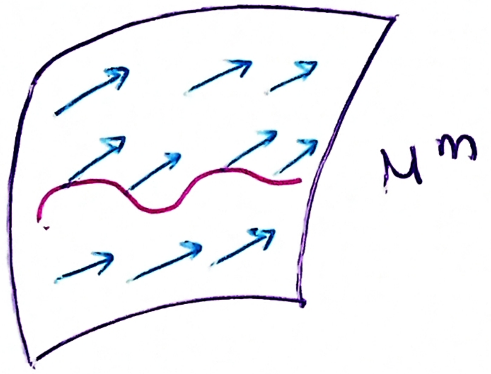
παράγουν τον εφαπτόμενο χώρο $T_{g(x_1, x_2)} M^2$

§ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΕΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω ότι $M^m \subseteq \mathbb{R}^k$ είναι διαφορίσιμο πολύπτυγμα και $X \in \mathfrak{X}(M^m)$ ένα διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο επί του πολυπτύγματος. Μια καμπύλη $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to M^m$ καλείται ολοκληρωτική καμπύλη του X αν-ν πληρεί την διαφορική εξίσωση

$D\gamma(t) = X_{\gamma(t)}$ ή ισοδύναμα $\dot{\gamma}(t) = X_{\gamma(t)}$



ΕΡΩΤΗΜΑ

Δοθέντος $X \in \mathfrak{X}(M^m)$ και σημείο $p \in M^m$, υπάρχει ολοκληρωτική καμπύλη, η οποία να διέρχεται από το σημείο p;

Αν υπάρχει τέτοια καμπύλη, είναι μοναδική;

Θα δούμε ότι η απάντηση στο ερώτημα είναι καταφατική.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $M^m \subseteq \mathbb{R}^k$ διαφορίσιμο πολύπτυγμα, X διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο και $p_0 \in M^m$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα

i) Υπάρχει ανοικτό διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$ που περιέχει το 0 και διαφορίσιμη καμπύλη $\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \to M^m$ που πληροί το

$$\begin{cases} \dot{\gamma}(t) = X_{\gamma(t)} \\ \gamma(0) = p_0 \end{cases}, \quad \forall t \in I \quad (*)$$

ii) Εάν $\gamma_1: I_1 \subseteq \mathbb{R} \to M^m$ και $\gamma_2: I_2 \subseteq \mathbb{R} \to M^m$ είναι δύο λύσεις του $(*)$ σε ανοικτά διαστήματα I_1 και I_2 που περιέχουν το 0, τότε $\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$ για κάθε $t \in I_1 \cap I_2$.

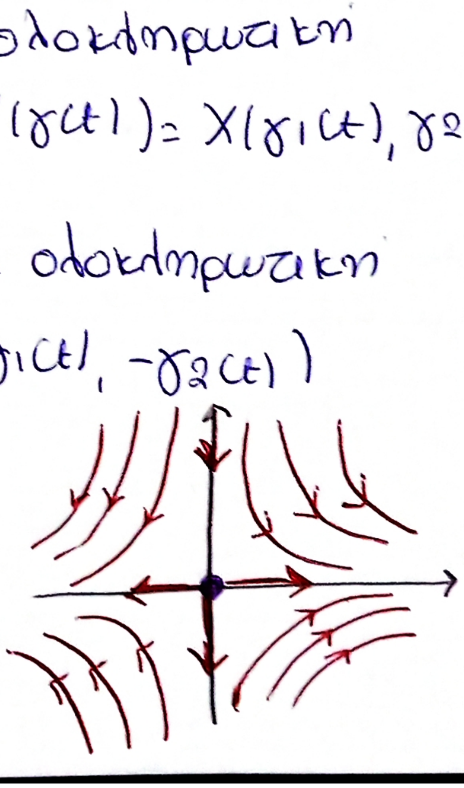
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ας πάρουμε ως M το $\mathbb{R}^2$ και ας θεωρήσουμε το διανυσματικό πεδίο X με τύπο $X(x,y) = x\vec{e_1} - y\vec{e_2} = (x,-y)$. Τότε η $\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ με $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ είναι ολοκληρωτική καμπύλη του X, αν $\dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t)) = X(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$

Ισοδύναμα, η καμπύλη γ είναι ολοκληρωτική καμπύλη αν $(\dot{\gamma}_1(t), \dot{\gamma}_2(t)) = (\gamma_1(t), -\gamma_2(t))$

Άρα λαμβάνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_1(t) = \gamma_1(t) \\ \dot{\gamma}_2(t) = -\gamma_2(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma_1(t) = e^t c_1 \\ \gamma_2(t) = e^{-t} c_2 \end{cases}$$



Δηλαδή, $\gamma(t) = (c_1 e^t, c_2 e^{-t})$